

Geradengleichungen und lineare Funktionen

Lese- und Lerntext für Anfänger

Lineare Funktionen
Geraden zeichnen – Lage von Geraden
Geradengleichung aufstellen

Geraden schneiden
Auch über lineare Gleichungssystem mit 2 Unbekannten

Klasse 7 bis 9

Für Fortgeschrittene (ab Klasse 10)
gibt es diesen Text mit einigen Erweiterungen und
fortschreitender Schwierigkeit
unter der Nummer 20010

Datei Nr. 12170

Stand 17. März 2012

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Der Ausgangspunkt dieses Themas „Geradengleichungen“ ist sehr oft der zuvor behandelte Begriff der [linearen Funktion](#). Weil dieses Thema nach vielleicht 15 bis 60 Minuten schnell in den Begriff Geradengleichung übergeht, sei auch hier dazu nur Grundsätzliches erwähnt.

Die Behandlung der Geradengleichung in Klasse 7 bis 9 geschieht auf einfacherem Niveau als in Klasse 10, wo man schon mit der Trigonometrie arbeiten kann oder in der Oberstufe.

Daher wurde hier auch auf Herleitungen wenig Wert gelegt. Im Vordergrund steht die Sicherung der im Unterricht gelernten Fakten und Methoden durch viele Beispiele und Übungen. Dennoch wurden einige Beispiele sehr ausführlich erklärt, damit das Verständnis der Methoden gefördert wird.

Wenn Schüler stur ihre Methoden anwenden und bald nicht mehr wissen, warum man dies oder jenes macht, dann kommen die Probleme schnell, wenn die Aufgaben modifiziert werden.

Ich habe hier die Punkt-Steigungs-Form auch besprochen, weil sicher der eine oder andere Lehrer damit arbeitet. Weitere Methoden dann in der erweiterten Datei 20010, die aus dieser (12170) durch Zusätze hervorgeht.

Demo-Text für www.mathe-cd.de

Inhalt

§ 1	Lineare Funktionen –Gleichungen mit 2 Unbekannten	4
1.1	Eine Gleichung mit <u>einer</u> Unbekannten	4
1.2	Eine Gleichung mit <u>zwei</u> Unbekannten hat eine unendliche Lösungsmenge	4
1.3	Lineare Funktionen	8
1.4	Zwei weitere Beispiele	9
§ 2	Drei Grundaufgaben für Geraden	11
§ 3	Ursprungsgeraden (und Proportionalitäten)	14
§ 4	Steigung und y-Achsenabschnitt	17
4.1	Das Absolutglied „n“ der Geradengleichung	17
4.2	Die Steigungszahl m in einer Geradengleichung	19
4.3	Zeichnen einer Geraden – 11 Beispiele	21
4.4	Besondere Geradengleichungen	28
4.5	Anmerkungen zum Schluss	29
	Parallele Geraden	29
4.6	Trainingsaufgaben zum Zeichnen	30
§ 5	Die Gleichung einer Geraden ermitteln	37
5.1	Berechnung von Streckenlängen aus zwei Punkten	37
5.2	Rechenübung: Berechnung der Steigung aus 2 Punkten	38
5.3	Nun endlich: Eine Geradengleichung aus einer Zeichnung „ablesen“	39
5.4	Eine Geradengleichung aufstellen, wenn n nicht bekannt ist	41
5.5	Eine Geradengleichung aufstellen, wenn 2 Punkte gegeben sind.	43
	Vier Methoden mit je vier Beispielaufgaben	
	Sehr viele Aufgaben	ab 46
5.6	Die Gleichung einer Parallelen aufstellen	50
§ 6	Den Schnittpunkt zweier Geraden berechnen	52
6.1	Das Gleichsetzungsverfahren	52
6.2	Das Subtraktionsverfahren	54
6.3	Spezialfälle	55
6.4	Das Einsetzungsverfahren	57
6.5	Den Schnittpunkt zweier geraden aus der Gleichung $ax + by = c$ berechnen	58
	Beispiele zum Additionsverfahren	58
6.6	Schnittpunkt mit der x-Achse	63
6.7	Großes Beispiel	64
	LERNBLATT: Geradengleichungen	75

§ 1 Lineare Funktionen - Gleichungen mit 2 Unbekannten (Grundwissen fürs Verständnis)

1.1 Eine Gleichung mit einer Unbekannten wie beispielsweise $2x - 3 = 9$

Eine wichtige Vorübung: **WISSEN:** So löst man diese Gleichung

Setzt man eine Zahl der Grundmenge **G** (das sind je nach Klassenstufe die Menge der rationalen Zahlen **Q** oder die reellen Zahlen **R**) in die Gleichung ein (man sagt „die **Probe machen**“, dann entsteht eine **Aussage**. Diese kann wahr oder falsch sein. Die Zahlen, die zu einer wahren Aussage führen, bilden die **Lösungsmenge der Gleichung**.

Beispiel: $x = 1$ einsetzen: $2 \cdot 1 - 3 = 9$, d.h. $-1 = 9$: Falsche Aussage.
 $x = 6$ einsetzen: $2 \cdot 6 - 3 = 9$, d.h. $9 = 9$: Wahre Aussage.

Um zu zeigen, dass 6 die einzige Zahl ist, welche zu einer wahren Lösung führt, stellt man die Gleichung um. Es gibt eine Reihe von Umformungen, die zu einer neuen Gleichung führen, die aber dieselbe Lösungsmenge haben. Man nennt sie **Äquivalenzumformungen**.

Gegebene Gleichung: $2x - 3 = 9$ | +3
 Addition der Zahl 3: $2x - 3 + 3 = 9 + 3$ | auf beiden Seiten!
 Zusammenfassen: $2x = 12$ | :2
 Division durch 2: $x = 6$

Jetzt steht eine so einfache Gleichung da, dass man ihr ansieht, welche Zahl zu einer wahren Aussage führt: Es ist NUR die Zahl 6.

Dann schreibt man die Lösungsmenge auf: $L = \{6\}$.

1.2 Eine Gleichung mit zwei Unbekannten hat eine unendliche Lösungsmenge

$$(a) \quad 2x - y - 3 = 0 \quad (b) \quad 2x - y = 3 \quad (c) \quad y = 2x - 3$$

Diese drei Gleichungen sind gleichwertig (äquivalent), denn man kann jede von ihnen in die andere umstellen. (Versuche es!).

Woraus besteht die Lösungsmenge einer Gleichung, wenn 2 Variable vorhanden sind?

Jede Lösung muss aus 2 Zahlen bestehen, denn man muss ja eine für x und (eventuell) eine andere für y einsetzen. Die Mathematiker haben sich darauf geeinigt, dass man diese beiden Zahlen als ein Zahlenpaar aufschreibt. Damit es nicht zu Missverständnissen kommt, hält man sich an die alphabetische Reihenfolge.

Aus $x = 5$ und $y = 7$ bildet man das Zahlenpaar $(5 | 7)$.

Aus $x = 2$ und $y = 4$ bildet man das Zahlenpaar $(2 | 4)$.

Jedes Zahlenpaar kann man in eine der drei Gleichungen einsetzen und so überprüfen, ob eine wahre oder eine falsche Aussage entsteht. Versuche selbst „die Probe zu machen“.

Hier die Probe für das Zahlenpaar $(5 | 7)$:

(a) $2x - y - 3 = 0$

$$2 \cdot \boxed{5} - \boxed{7} - 3 = 0$$

d. h. $0 = 0$

(b) $2x - y = 3$

$$2 \cdot \boxed{5} - \boxed{7} = 3$$

$3 = 3$

(c) $y = 2x - 3$

$$\boxed{7} = 2 \cdot \boxed{5} - 3$$

$7 = 7$

In jedem Fall entsteht eine wahre Aussage. Das Paar $(5 | 7)$ gehört also zu den Lösungsmengen dieser Gleichungen, was man so schreibt: $(5 | 7) \in L$.

Dann die Proben für $(2 | 4)$:

(a) $2x - y - 3 = 0$

$$2 \cdot \boxed{2} - \boxed{4} - 3 = 0$$

d. h. $-3 = 0$

(b) $2x - y = 3$

$$2 \cdot \boxed{2} - \boxed{4} = 3$$

$0 = 3$

(c) $y = 2x - 3$

$$\boxed{4} = 2 \cdot \boxed{2} - 3$$

$4 = 1$

In jedem Fall entsteht eine falsche Aussage.

Das Paar $(2 | 4)$ gehört nicht zu den Lösungsmengen: $(2 | 4) \notin L$.

Es sei verraten, dass es hier unendlich viele Paare gibt, welche die Gleichungen lösen.

Etwa: $(0 | -3)$, $(-1 | -5)$, $(\frac{7}{2} | 4)$, $(-\frac{5}{3} | -\frac{19}{3})$ usw.

Wer will, kann wie soeben in einer der drei Gleichungen die Probe machen um zu erkennen, dass wirklich ein Lösungspaar vorliegt. Es gibt eine einfache Methode zur Berechnung von Lösungspaaren.

Methode zur Berechnung von Lösungspaaren

1. Schritt: Man stellt die Gleichung so um, dass links y alleine steht.

Aus $2x - y - 3 = 0$ oder aus $2x - y = 3$ kommt man dann auf $y = 2x - 3$.

(In seltenen Fällen stellt man nach x um, wenn dies günstiger ist.)

2. Schritt: Man wählt irgendeine Zahl für x , setzt diese ein und berechnet dann den zugehörigen y -Wert.

Zu $x = 1$ erhält man $y = 2 \cdot \boxed{1} - 3 = -1$.

Zu $x = 5$ erhält man $y = 2 \cdot \boxed{5} - 3 = 7$

Zu $x = 0$ erhält man $y = 2 \cdot \boxed{0} - 3 = -3$

Zu $x = -1$ erhält man $y = 2 \cdot \boxed{-1} - 3 = -5$ usw.

Jetzt sind diese Zahlenpaare entstanden: $(1 | -1)$, $(5 | 7)$, $(0 | -3)$, $(-1 | -5)$ usw.

Sie alle sind Lösungspaare (kurz Lösungen) der Gleichung $y = 2x - 3$.

Jetzt erkennt man auch, dass es unendlich viele Möglichkeiten gibt, für x eine Zahl zu wählen und dazu den passenden y -Wert zu berechnen.

Die Gleichung $y = 2x - 3$ besitzt somit unendlich viele Lösungspaare.

Geometrische (graphische) Darstellung der Lösungsmenge:

Zahlenpaare kann man in ein Koordinatensystem als Punkte eintragen.

Führt man dies mit den Lösungspaaren

$$(5 | 7), (1 | -1), (0 | -3), (-1 | -5)$$

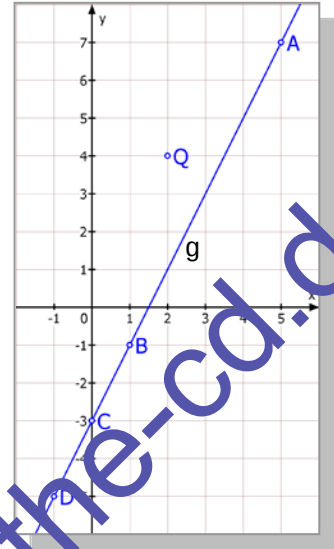
durch, erkennt man, dass sie alle auf einer Geraden liegen.

MERKE: Lösungsmenge einer linearen Gleichung auf einer Geraden

Rechts wurden diese vier Paare als Punkte A, B, C und D eingetragen.

Das Paar $(2 | 4)$ stellt keine Lösung der Gleichung dar. Der zugehörende Punkt Q liegt nicht auf der Geraden.

Man nennt $y = 2x - 3$ die Gleichung der Geraden.



Hinweise:

Wenn man Lösungen der Gleichung $y = 2x - 3$ berechnet, sieht man daher auch, dass man Punkte der Geraden g mit $y = 2x - 3$ berechnet. Dann gibt man den Punkten Namen und schreibt dies so auf: $A(5 | 7)$. Man sagt dann: A hat die **Koordinaten** $x = 5$ und $y = 7$.

Eine Gerade betrachtet man als **Punktmenge**. Mit den Symbolen der Mengenlehre kann man die Aussage „A liegt auf g “ dann auch so darstellen: $A \in g$, was nichts anderes heißt als „**A ist Element der Menge g** “, man sagt aber immer dazu: „**A liegt auf g** “.

Man nennt die Gleichung $y = 2x - 3$ eine **lineare Gleichung**, weil alle Variablen die Exponenten 1 haben. Denkt man an das Wort *Lineal*, dann wird auch klar, warum man das Wort „linear“ gewählt hat: Die Lösungsmenge dieser linearen Gleichung kann man als Gerade in einem Koordinatensystem darstellen, wozu man ein Lineal benötigt.